2011

Zeszyt Metodyczny
Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli
w Centrum Doskonalenia i Edukacji
we Włocławku

Barbara Kotarska

maj 2011

Wstęp

Materiał przedstawiony w tym zeszycie adresuję do nauczycieli, którzy chcieliby urozmaicić szkolne lekcje matematyki lub pracują z dziećmi ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki – dysleksja i dyskalkulia. Jednym z pierwszych symptomów świadczących o dyskalkulii może być np., niemożność nauczenia się tabliczki mnożenia. W szkole trzeba ją umieć na pamięć, a sprawdza się to na wyrywki. Nauczyciel rzuca 6 razy 9 i oczekuje natychmiastowej odpowiedzi. Dyskalkulik nie jest w stanie tak się tego nauczyć. Można go sto razy zapytać o to samo, a on za każdym razem będzie po swojemu liczyć, ile to jest. Co ciekawe tu nie chodzi o zwykły defekt pamięci. Takie dziecko wiersza nauczy się bez problemu, ale tabliczki mnożenia nie. Także te dzieci mają kłopoty z działaniami pisemnymi szczególnie z dodawaniem i mnożeniem – wykonują działania od lewej do prawej w sposób nieprawidłowy. Można na lekcjach lub na dodatkowych zajęciach pokazać różne sposoby mnożenia i dodawania pisemnego od lewej strony oraz nauczyć tabliczki mnożenia - krótko mówiąc pomagać i uczyć tak, by to było skuteczne, ale starać się by to nie było wbrew naturze dziecka.

Życzę przyjemnej i pożytecznej lektury

1. Skrócony sposób mnożenia pewnych liczb.

Gdy wypadnie nam mnożyć **dwie liczby bliskie 100**, można znakomicie skrócić przebieg mnożenia za pomocą tak zwanych *dopełnień.*

Przypuśćmy, iż mamy wykonać mnożenie **94 • 97**

Dopełnieniem mnożnej do 100 będzie 6, dopełnieniem mnożnika będzie 3.

94 – 97

6 – 3

Dla uzyskania pierwszych dwu cyfr iloczyny należy odjąć od mnożnej dopełnienie mnożnika lub odwrotnie, od mnożnika odjąć dopełnienie mnożnej, co oczywiście „wychodzi na jedno”

$$94 - 3 = 97 - 6 = 91$$

Dwie pozostałe cyfry iloczynu wynikną z przemnożenia dopełnień:

$$6 \cdot 3 = 18$$

Iloczyn wyniesie: **9118**

Ogólne uzasadnienie:

Jeżeli $x + a = 100$, $y + b = 100$, to

$$xy = (100 - a) \cdot (100 - b) = (100 - a - b) \cdot 100 + ab$$

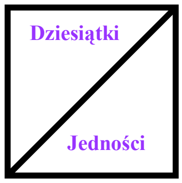
Przykład: **97 • 98** = (100 – 3) • (100 – 2) = (100 – 5) • 100 + 3 • 2 = **9506**

2. Hinduski sposób mnożenia.

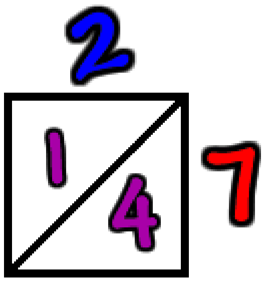
Hinduski sposób mnożenia został rozpowszechniony w Europie w późnym Średniowieczu i w czasach Odrodzenia.

To jest naprawdę fajny sposób na mnożenie większych liczb. Jest to dużo łatwiejsze niż zwykły sposób i jest to też rodzaj zabawy.

Zanim pokażę tabelkę z odpowiednimi kratkami – polami, to najpierw musimy ustalić jak będziemy wpisywać iloczyny odpowiednich liczb



Przykład: $2 \cdot 7 = 14$



Tak umieścimy 1 (cyfra dziesiątek) w najwyższym miejscu i 4 (cyfra jedności) w dolnym miejscu.

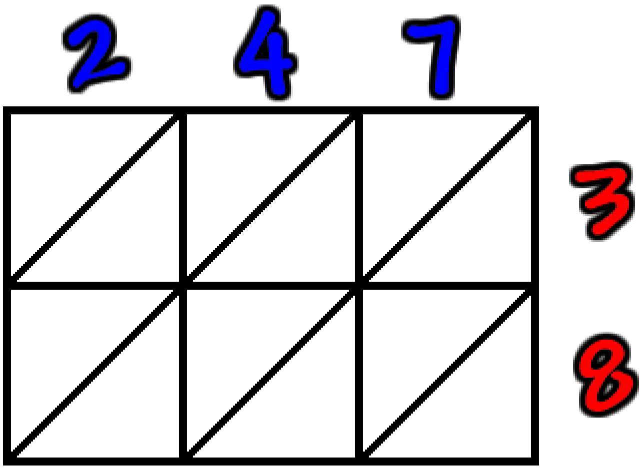
Gdy iloczyn liczb będzie wynikiem jednocyfrowym: np. 2 • 3 = **6,** to w miejsce dziesiątek wpisujemy **0**, a w miejsce jedności **6.**

Przykład: 

Rysujemy prostokątną tabelkę i każde pole zaznaczamy przekątną: jak powyżej.

Mnożną **247** wypisuje się u góry tabelki, mnożnik **38** z prawej strony.

Oto tabelka:

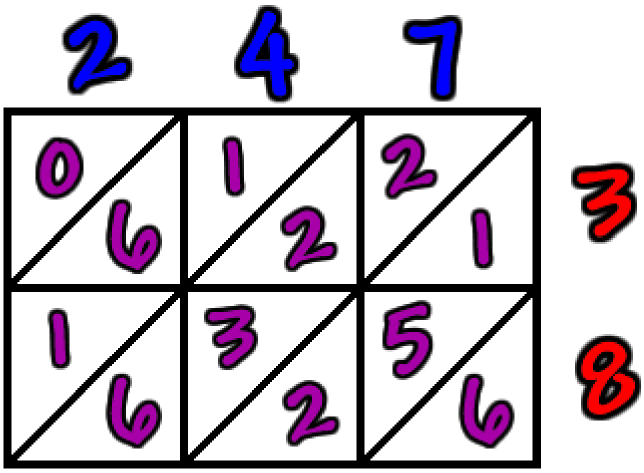


Teraz mnożymy odpowiednio liczby w pierwszym rzędzie:

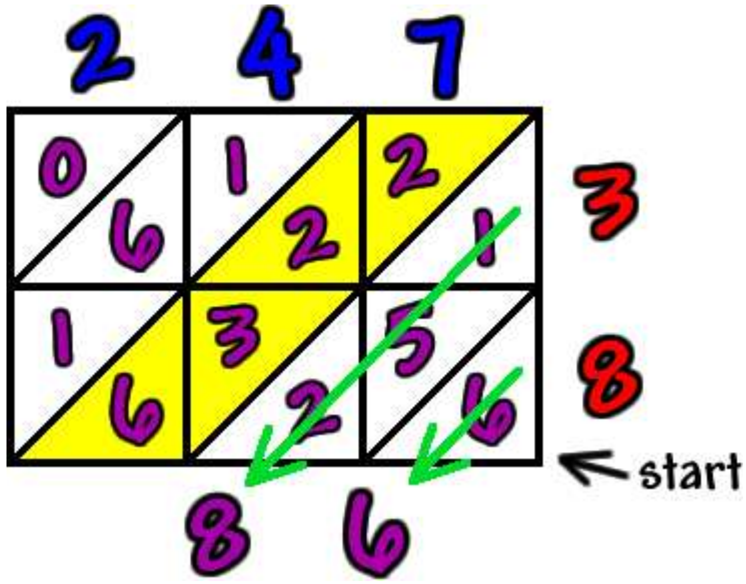
2x3, 4x3, 7x3

W drugim rzędzie:

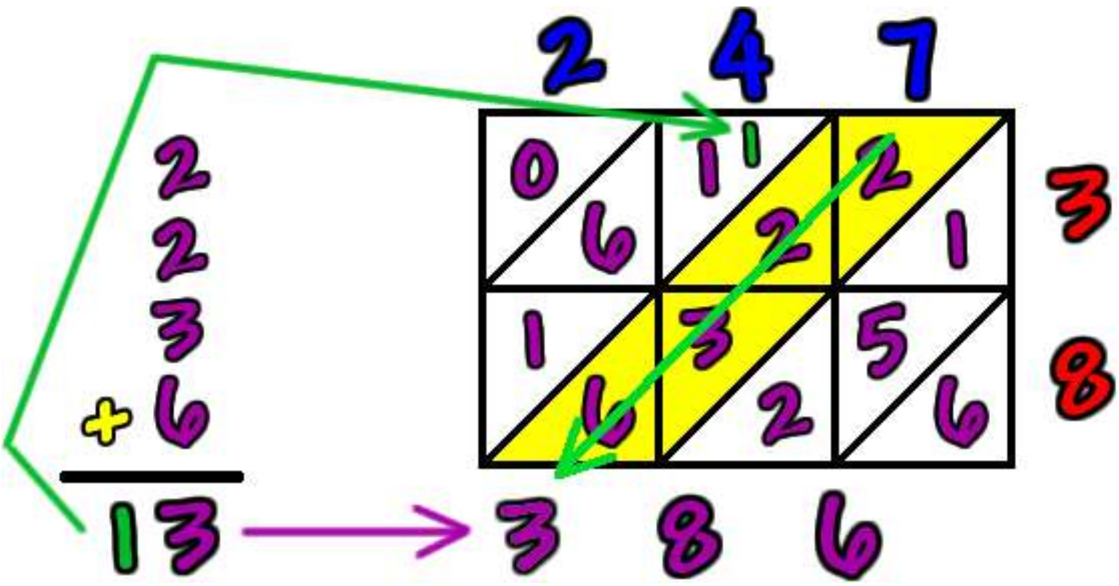
2x8, 4x8, 7x8



Gdy już wypełnimy pola cyframi, sumujemy cyfry wzdłuż przekątnych i wypisujemy wynik pod tabelką z lewej strony - rozpoczynamy od skrajnego prawego trójkąta najniższego rzędu (patrz: start).

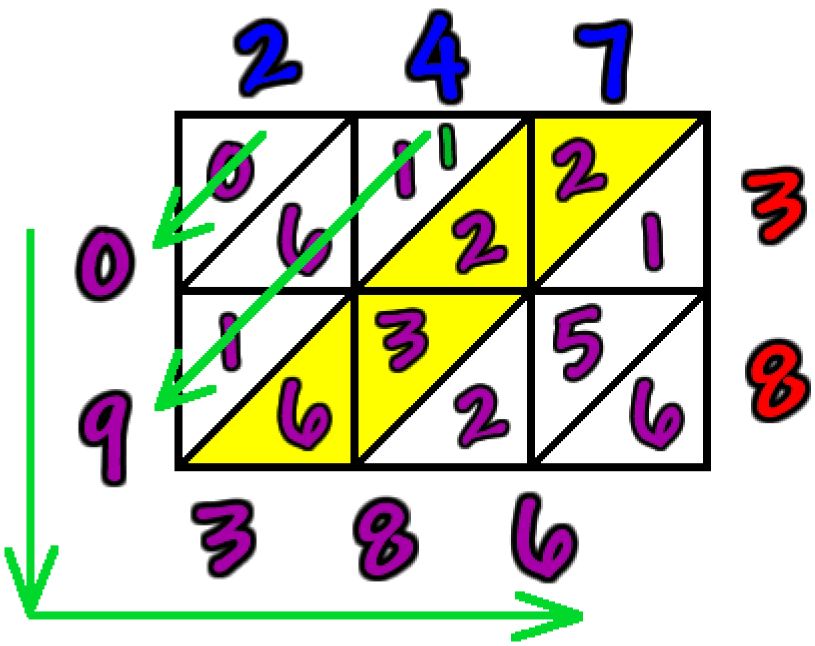


Gdy podczas dodawania (żółty pasek) napotkamy wynik dwucyfrowy **13** – „przenosimy naddatki **1** do wyższego rzędu tak jak w zwykłym dodawaniu.



Dostajemy odpowiedź, czytając w dół z lewej strony i u dołu od lewej do prawej.

Poniższy rysunek pokazuje kierunek odczytania wyniku – **9386** (pomijamy zero na przedzie)



Możemy teraz polecić uczniom sprawdzenie wyniku za pomocą kalkulatora lub mnożenia w zwykły sposób.

Ten sposób wykorzystywano do mnożenia liczb wielocyfrowych. We Włoszech ten sposób nazwano: **gelosia,** co znaczy *zazdrość* (od zazdrostek czyli żaluzji, które kształtem swym przypomina krata używana w tym mnożeniu). Na tym sposobie oparł znakomity matematyk angielski, twórca logarytmów Jan Neper (1550 – 1617), pomysł swych liczydeł znanych pod nazwą *sztabek rachunkowych Nepera.*

3. **Mnożenie krzyżowe.**

Mnożenie krzyżowe zwane jest „mnożeniem błyskawicznym". Dla liczb dwucyfrowych jest ono istotnie przy niewielkiej wprawie doskonałym środkiem przyśpieszania obliczeń.

Mnożenie liczb dwucyfrowych możemy wykonać w pamięci w następujący sposób: mnożymy końcowe cyfry, potem początkową cyfrę pierwszej przez końcową drugiej i na odwrót, wreszcie mnożymy cyfry początkowe. Wyniki dodajemy.

Przykład: 63 • 13

$$
\begin{array}{rrrl}
 & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \\
\text{x} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \\
\hline
 & & 9 & \\
 & 2 & 1 & = 6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\
 & 6 & & \\
\hline
\mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{9} &
\end{array}
$$

W wypadku liczb wielocyfrowych sposób ten nie nadaje się do praktycznego zastosowania, chociaż jako algorytm jest tym samym co średniowieczny sposób z tabelką. Dzięki niemu możemy zauważyć, że iloczyny cząstkowe nie zależą od porządku czynników i zapewne łatwiej jest sprawdzać obliczenia. Stosowany był podobno z powodzeniem przez niektórych wybitnych rachmistrzów.

Jeden przykład wystarczy do zapoznania się z tym sposobem:

4 7 1	
x 1 3 5	
5	$= 1 \bullet 5$
3 8	$= 7 \bullet 5 + 1 \bullet 3$
4 2	$= 1 \bullet 1 + 7 \bullet 3 + 4 \bullet 5$
1 9	$= 4 \bullet 3 + 7 \bullet 1$
4	$= 4 \bullet 1$
6 3 5 8 5	

4. Metoda pudełkowa mnożenia liczb

Poniżej jest przedstawiona metoda pudełkowa na przykładzie 35 • 19 = 665

	30	**5**
10	10 • 30 = 300	10 • 5 = 50
9	9 • 30 = 270	9 • 5 = 45

300 + 270 + 50 + 45 = 665

5. Tabliczka mnożenia na palcach

- **Mnożenie przez 9**

Dziewiątka jest bardzo miłą cyfrą, zwłaszcza dla tych, którym z trudnością przychodzi zdobycie tej najważniejszej ze wszystkich „zdobyczy” matematycznych – tabliczki mnożenia.

Otóż można zupełnie nie uczyć się mnożenia przez 9. Po co sobie obciążać pamięć? Wystarczy mieć 10 palców u rąk, obie ręce położyć na stole i zginać odpowiedni palec, a mnożenie samo się dopełni i trzeba tylko odczytać wynik.

Wyciągnij przed siebie obie dłonie grzbietem do góry, palce wyprostowane.

Jeśli mnożymy **9 przez 2**, to zegnij drugi palec licząc od lewej strony (czyli serdeczny palec lewej dłoni). Wyprostowane palce znajdujące się po lewej stronie od zgiętego palca wskazują ilość dziesiątek (1). Wyprostowane palce znajdujące się po prawej stronie od zgiętego palca wskazują ilość jedności (8). Wynik **18**.

Jeśli mnożymy **9 przez 5**, to zegnij piąty palec licząc od lewej strony (czyli kciuk lewej dłoni). Wyprostowane palce znajdujące się po lewej stronie od zgiętego palca wskazują ilość dziesiątek (4). Wyprostowane palce znajdujące się po prawej stronie od zgiętego palca wskazują ilość jedności (5). Wynik **45**.

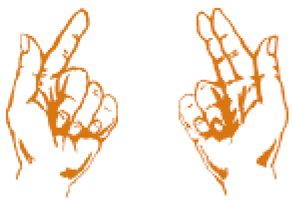
- **Mnożenie przez 6,7 i 8**

Oto sposób mnożenia na palcach liczb większych od 5. Chcąc skorzystać z tej metody, musimy dobrze już mnożyć do 25.

Mamy wykonać mnożenie: $7 \cdot 8$

Ale $7 = 5 + 2$, a $8 = 5 + 3$, to znaczy

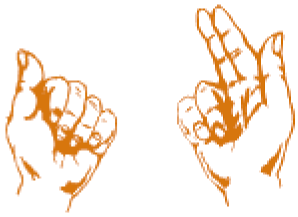
$$7 \cdot 8 = (5 + 2) \cdot (5 + 3)$$



Należy podnieść 2 palce u jednej ręki i 3 palce u drugiej ręki. Suma palców podniesionych (2 + 3) wskaże cyfrę dziesiątek iloczynu (**5**), a jedności iloczynu otrzymamy mnożąc liczbę zgiętych palców jednej ręki przez liczbę palców drugiej ręki: $3 \cdot 2 =$ **6**

Ostatecznie mamy $7 \cdot 8 =$ **56**

Kolejny przykład: **6×8**



$6 = 5 + 1$, a $8 = 5 + 3$, to znaczy

$$6 \cdot 8 = (5 + 1) \cdot (5 + 3)$$

Należy podnieść 1 palec u jednej ręki i 3 palce u drugiej ręki. Suma palców podniesionych (1 + 3) wskaże cyfrę dziesiątek iloczynu (**4**), a jedności iloczynu otrzymamy mnożąc liczbę zgiętych palców jednej ręki przez liczbę palców drugiej ręki: 4 • 2 = **8**

Ostatecznie mamy 6 • 8 = **48**

Ostatni przykład: **5** • 8

5 = 5 + 0, a 8 = 5 + 3, to znaczy

$$5 \cdot 8 = (5 + 0) \cdot (5 + 3)$$

Należy podnieść 0 palców u jednej ręki i 3 palce u drugiej ręki. Suma palców podniesionych (0 + 3) wskaże cyfrę dziesiątek iloczynu (**3**), a jedności iloczynu otrzymamy mnożąc liczbę zgiętych palców jednej ręki przez liczbę palców drugiej ręki: 5 • 2 = **10**

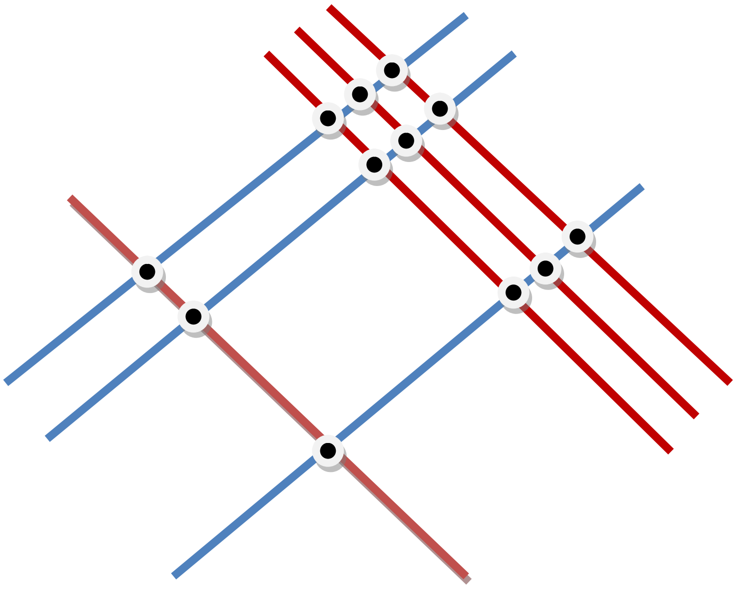
Ostatecznie mamy 5 • 8 = **40**

6. Mnożenie za pomocą linii

Ciekawy sposób mnożenia za pomocą wykreślania odpowiednich linii.

Przykład:

21 • 13



2 7 3

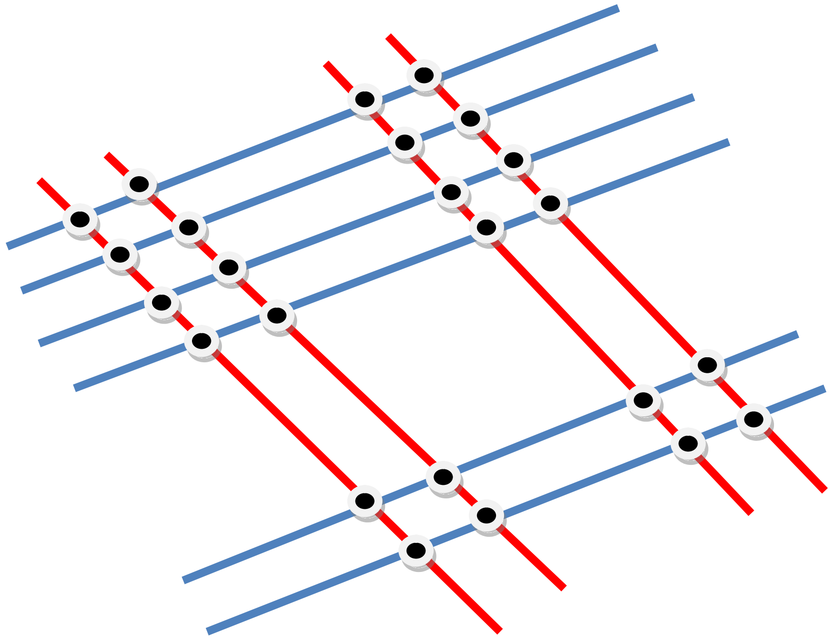
W mnożnej 21 - cyfra dziesiątek wynosi 2, więc rysujemy ukośne dwie linie (na rysunku kolor niebieski), poniżej pod tym samym kątem w pewnym odstępie rysujemy jedną linię gdyż cyfra jedności wynosi 1

Tak samo postępujemy z mnożnikiem 13, zaczynając od dołu tak, aby linie się przecięły i mamy narysowaną jedną linię czerwoną gdyż cyfra dziesiątek wynosi 1 i w pewnym odstępie trzy linie także czerwone gdyż cyfra jedności wynosi 3.

Teraz zaznaczamy punkty przecięcia linii niebieskich i czerwonych, a następnie sumujemy zaczynając od prawej strony. Wynik mnożenia 21 • 13 to liczba 273.

Inny przykład mnożenia z przekroczeniem progu dziesiątkowego podczas sumowania punktów przecięcia odpowiednich linii.

42 • 22



1

9 2 4

7. Na zakończenie żarcik matematyczny

Jak ułożyć w dziesięciu łóżkach jedenastu chłopców w taki sposób, żeby każdy spał oddzielnie?

Oto rozwiązanie:

W pierwszym łóżku kładziemy tymczasowo dwóch chłopców, w drugim - trzeciego, w trzecim - czwartego, w czwartym - piątego, w piątym - szóstego, w szóstym - siódmego, w siódmym - ósmego, w ósmym - dziewiątego, w dziewiątym - dziesiątego. Dziesiąte łóżko pozostaje na razie nie zajęte, przenosimy więc do niego jedenastego chłopca, który tymczasem leżał w pierwszym łóżku – i oto każdy z 11 chłopców śpi oddzielnie. Nieprawdaż?

Literatura

1. Michał Szurek, ***O nauczaniu matematyki ,***GWO, Gdańsk 2005
2. Szczepan Jeleński, ***Lilavati,*** PZWS
3. Szczepan Jeleński, ***Śladami Pitagorasa – rozrywki matematyczne,*** PZWS